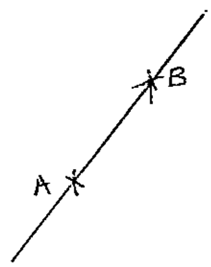
LES VECTEURS

I. introduction de la notion de vecteur

On soulève une chaise : on la déplace verticalement, vers le haut, en utilisant une certaine force.

Trois éléments apparaissent : une direction (la verticale)
: un sens (vers le haut)
: la grandeur de la force utilisée

L'ensemble de ces trois éléments est appelé un vecteur.



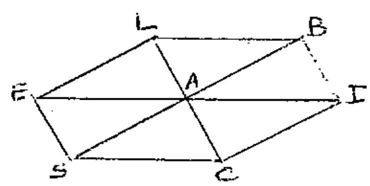
Le vecteur, noté $\overrightarrow{AB}$, a
pour <u>direction</u>, celle de la droite (AB)
pour <u>sens</u>, celui de A vers B
pour <u>norme</u>, la longueur du segment [AB]

La norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ se note $\|\overrightarrow{AB}\|$. $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$

II. comment reconnaître des vecteurs égaux ? ~~livre~~ p. 126

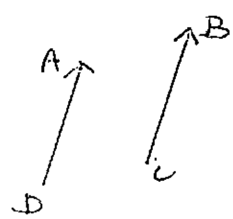
<u>Activité 1</u>

ACIB, BLAI, ABLE, SALE, CAES et SAIC sont six parallélogrammes.
Indiquer tous les vecteurs égaux à $\overrightarrow{EL}$, à $\overrightarrow{LB}$, à $\overrightarrow{AE}$, à $\overrightarrow{AL}$.



<u>deux vecteurs égaux font apparaître quelle figure ?</u>

On donne $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$. Que dire du quadrilatère ABCD ? Citer d'autres vecteurs égaux.



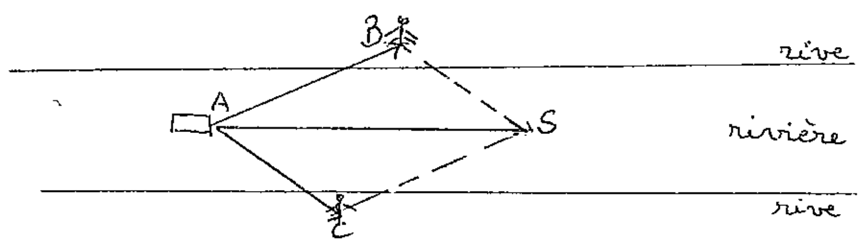
Méthode pour reconnaître un parallélogramme : trouver deux vecteurs égaux

Exercice ABC est un triangle. Placer M tel que $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{BA}$ et placer N tel que $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{CB}$. Quelle est la nature du quadrilatère AMBN ?

indication : utiliser des vecteurs égaux.

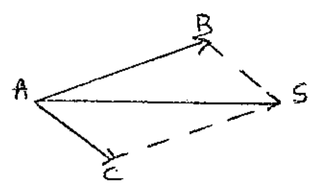
III. introduction de l'addition vectorielle

Une gerbe de blé est tirée par deux cultivateurs à l'aide de deux cordes (figure ci-dessous).
Le premier avec une force représentée par $\overrightarrow{AB}$, le second avec une force représentée par $\overrightarrow{AC}$. Expérimentalement, on s'est aperçu que la botte était soumise à une force représentée par $\overrightarrow{AS}$ où S est le quatrième sommet du parallélogramme ABSC.



d'où la définition de la somme de deux vecteurs.
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AS}$ où S est le quatrième sommet du parallélogramme ABSC.

Comme $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BS}$, on peut écrire $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BS}=\overrightarrow{AS}$ (relation de Chasles)



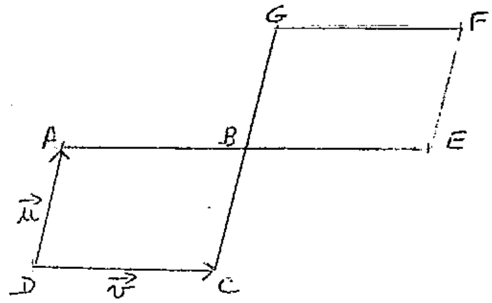
IV. activité utilisant la relation de Chasles

ABCD est un parallélogramme. E, F, G sont les symétriques respectifs de A, D, C par rapport à B

On pose $\overrightarrow{DA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{DC} = \vec{v}$

1°) Quels sont les vecteurs égaux à $\vec{u}$? égaux à $\vec{v}$?

Justifier les réponses soit en comparant direction, sens et norme, soit en utilisant un parallélogramme.



aide : B étant le milieu des segments [AE] et [CG], que dire du quadrilatère DAFE ?

2°) Compléter les égalités vectorielles :

$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{D\ldots}$ $\quad\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{E\ldots}$ $\quad\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{C\ldots}$

$\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{C\ldots}$ $\quad\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{B\ldots}$ $\quad\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{A\ldots}$

indication : utiliser éventuellement des vecteurs égaux

3°) Exprimer en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les vecteurs $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{BF}$

<u>remarque 1</u> Il existe des vecteurs particuliers : le vecteur nul, les vecteurs opposés utilisés dans la soustraction vectorielle

Ainsi, $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AO}$ $\quad\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$ $\quad\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$

livre p. 128

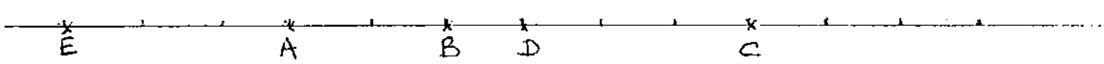
<u>remarque 2</u>

ABC est un triangle rectangle en A tel que AB = 4 cm et AC = 3 cm. Placer S tel que $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Calculer AS

<u>Attention</u> ! Ne pas confondre la somme vectorielle et la somme des normes. $\|\overrightarrow{AB}\| + \|\overrightarrow{AC}\| \neq \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\|$ en général.

V. <u>Multiplication d'un vecteur par un réel</u>

Comment noter $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$? $2\overrightarrow{AB}$ tout simplement !



Compléter : $\overrightarrow{AC} = \ldots \overrightarrow{AB}$ $\quad\overrightarrow{AB} = \ldots \overrightarrow{AC}$ $\quad\overrightarrow{AC} = \ldots \overrightarrow{AD}$ $\quad\overrightarrow{AD} = \ldots \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{BD} = \ldots \overrightarrow{AB}$ $\quad\overrightarrow{AD} = \ldots \overrightarrow{AB}$ $\quad\overrightarrow{AE} = \ldots \overrightarrow{AB}$

On définit ainsi le produit d'un vecteur par un réel (livre p130)

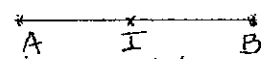
On arrive à la notion de vecteurs colinéaires (livre p 133) et les conséquences : alignement de points et parallélisme.

Activité 1 repérage d'un point défini par une égalité vectorielle.

ABC est un triangle.
Après avoir comparé les directions, sens et normes des vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$, placer D tel que $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$
De même, placer E tel que $\overrightarrow{AE} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

Activité 2 concernant le milieu d'un segment

I est le milieu d'un segment [AB]

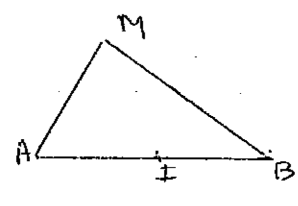


1) Trouver des relations vectorielles évidentes qui caractérisent le point I en utilisant seulement les points A, B, I.

2) M est un point quelconque du plan.

a) démontrer l'égalité vectorielle $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$

<u>indication</u> : exécuter la démonstration avec <u>deux méthodes</u> l'une <u>géométrique</u> en faisant apparaître un parallélogramme AMBS.
l'autre <u>vectorielle</u> en décomposant avec la relation de Chasles, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})$ ....



b) retrouver les égalités vectorielles obtenues en 1) en plaçant M en A, en I, en B.

c) M est un point donné.
démontrer que si $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$, alors I est le milieu de [AB].
indication : utiliser la relation de Chasles.

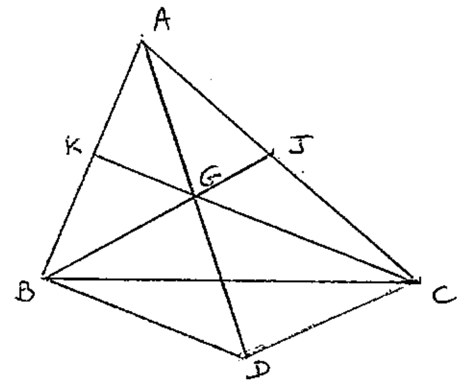
Activité 3 concernant le centre de gravité d'un triangle

(sans utiliser les résultats connus en 3ème)

ABC est un triangle. J et K sont les milieux respectifs de [AC] et [AB]. [BJ] et [CK] se coupent en G.

Soit D le symétrique de A par rapport à G.

1°) Démontrer que BGCD est un parallélogramme.



indication : utiliser les bases moyennes dans les triangles ADC et ABD.

2°) Evaluer $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$; en déduire l'égalité : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ (1)

3°) (AD) et (BC) se coupent en I.

Justifier que I est le milieu de [BC] et que G appartient aux trois médianes du triangle ABC.

4°) Justifier l'égalité $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GI}$ (2)

Utiliser les égalités (1) et (2) pour démontrer l'égalité $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$

VI. Entraînement au calcul vectoriel.

Exercice 1 ABC est un triangle

1°) Placer D tel que $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

2°) M est un point quelconque. Démontrer l'égalité vectorielle : $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MA}$

indication Evaluer le premier membre de l'égalité en introduisant, grâce à la relation de Chasles, $\overrightarrow{MD}$ et $\overrightarrow{MA}$ qui apparaissent dans le second membre.

Exercice 2 ABC est un triangle. On donne BC = 6 cm.

1°) I est défini par $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ (1). Comparer les directions, les sens et les normes des vecteurs $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BC}$ et placer I.

2°) Démontrer l'égalité vectorielle : $2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AI}$

indication Evaluer le premier membre de l'égalité en introduisant, grâce à la relation de Chasles, le vecteur $\overrightarrow{AI}$ qui apparaît dans le second membre. On utilisera l'égalité (1) pour justifier que : $2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

Exercice 3 placement de points

A et B sont deux points donnés tels que $AB = 10\,cm$

1°) Placer le point C tel que $\vec{AC} = -\frac{1}{4}\vec{AB}$ (1)

2°) Placer le point D tel que $\vec{DA} = -\frac{1}{4}\vec{DB}$ (2)

Solution

1) Placement de C

$\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires, donc A, B, C sont alignés

$\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ n'ont pas le même sens

$AC = \frac{1}{4} AB = 2{,}5$ cm

2) Placement de D

Peut-on appliquer la même méthode qu'au 1°) ?

Non, car le renseignement $DA = \frac{1}{4} DB$ ne permet pas de placer D.

(2) se transforme ainsi $4\vec{DA} = -\vec{DB}$. On fait apparaître $\vec{AB}$, vecteur connu dans le second membre.

$4\vec{DA} = -(\vec{DA} + \vec{AB})$ $5\vec{DA} = -\vec{AB}$ $5\vec{AD} = \vec{AB}$ Enfin $\vec{AD} = \frac{1}{5}\vec{AB}$

on retrouve la situation du 1°)

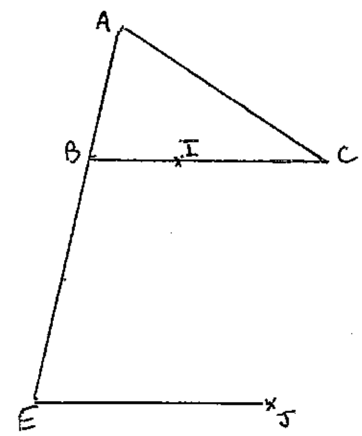
A SAVOIR A, B, k étant connus. On sait placer le point C tel que $\vec{AC} = k\vec{AB}$ $(k \in \mathbb{R}^*)$

Exercice 4 ABC est un triangle

Placer I tel que $\vec{BI} = \frac{1}{3}\vec{BC}$

Placer E tel que $\vec{AE} = 3\vec{AB}$

Placer J tel que $\vec{EJ} = \vec{BC}$



1°) Laisser un temps d'observation aux élèves et voir ce qu'ils proposent (BCJE est un parallélogramme – A, I, J sont alignés –)

On va essayer de démontrer que les points A, I, J sont alignés

a) comment faire ? utiliser des vecteurs colinéaires.

b) démontrer que $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$ sont colinéaires et conclure.

méthode : exprimer l'un des vecteurs en fonction de l'autre.

$\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EJ}$

$\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ (on cherche à introduire le point I)

$\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BI}$

$\overrightarrow{AJ} = 3(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI})$ Enfin, $\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AI}$

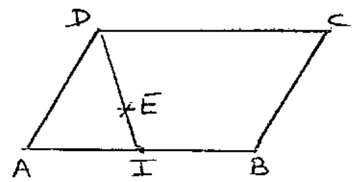
Les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$ sont colinéaires, donc A, I, J sont alignés

Exercice 5

ABCD est un parallélogramme.

I est le milieu de [AB].

Placer E tel que $\overrightarrow{IE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{ID}$



1°) Laisser un temps d'observation aux élèves et voir ce qu'ils proposent

2°) On va essayer de démontrer que A, E, C sont alignés.

a) comment faire ? utiliser des vecteurs colinéaires.

b) Démontrer que $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et conclure.

aide
1) exprimer $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$
2) exprimer $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{IE}$
3) démontrer que $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AE}$

Exercice 6

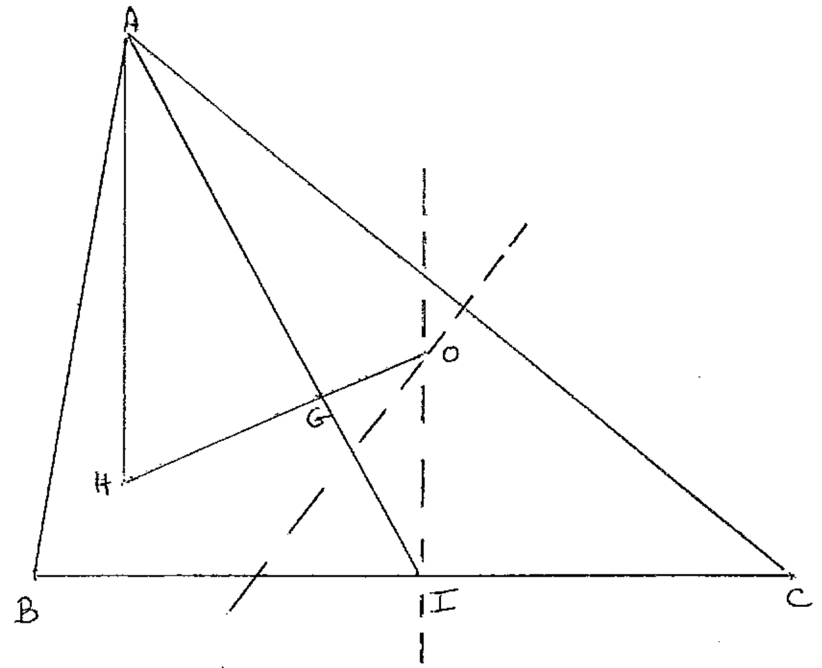
Utilisation de la colinéarité pour démontrer que deux droites sont parallèles

ABC est un triangle quelconque. Faire un grand dessin, très précis. I est le milieu de [BC]

a) placer le centre de gravité G du triangle ABC sur la médiane [AI]

b) placer le centre O du cercle circonscrit au triangle ABC (utiliser la médiatrice de [BC] et une autre médiatrice)

c) Placer le point H tel que $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$



<u>Questions à suggérer</u>

Quel rôle semble avoir la droite (AH) dans le triangle ABC ? une hauteur

Comment le démontrer ? en prouvant $(AH) \perp (BC)$ ou encore $(AH) // (OI)$

Comment démontrer que deux droites sont parallèles ? en utilisant la colinéarité de deux vecteurs

On va essayer de démontrer que $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires.

1°) Démontrer l'égalité vectorielle : $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$

<u>indication</u> : évaluer le premier membre de l'égalité en introduisant, grâce à la relation de Chasles, le vecteur $\overrightarrow{OG}$ qui apparaît dans le second membre.

2°) En déduire que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$ et ensuite que $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AH}$

3°) Démontrer que $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OI}$.

Quel est le rôle de (AH) dans le triangle ABC ?

Quel est le rôle de H dans le triangle ABC ?

<u>indication</u> : On peut démontrer de façon analogue que (BH) est une <u>autre hauteur</u> dans le triangle ABC.